Funktionentheorie
WS 2018/19

Klausur Funktionentheorie

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Soll-Punkte:	6	4	5	5	6	4	30
Ist-Punkte:							

Begründen Sie Ihre Antworten und Lösungen. Bearbeitungszeit: **120** Minuten

1. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie mindestens drei Ihrer Entscheidungen. Sie können maximal 2 Bosnuspunkte bekommen, wenn Sie darüber hinaus Begründungen liefern.

   a) Die Funktion $w = f(z) = 1/z$ bildet den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$ auf die Gerade $\{w = u + iv \in \mathbb{C} : u = 1/2\}$ ab.

   b) Die Funktion $f(z) = z\bar{z}$ ist im Nullpunkt holomorph.

   c) Jede ganze Funktion besitzt eine Stammfunktion.

   d) Die Funktion $f : D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = |\cos(\overline{z})|$ nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von D an.

   e) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gilt $f(e^{i/n}) = e^{-2i/n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann hat f in Null einen Pol 2. Ordnung.

2. Seien f, g ganze Funktionen, die $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ genügen. Zeigen Sie, dass gilt

$$f = cg \qquad \forall c \in \mathbb{C},\ |c| \leq 1.$$

3. Sei $f(z) = z/(e^z - 1)$ und $\gamma(\varphi) = 7e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Berechnen Sie

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, d\varphi$ und b) die Windungszahl $n(f \circ \gamma, 0)$.

4. Beweisen Sie mittels Satz von Rouché den Fundamentalsatz der Algebra:
   Sei $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann hat die Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

   in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (entsprechend der Vielfachheit gezählt).

5. a) Geben Sie die Laurentreihe von

$$f_k(z) = \frac{\sin z}{z^k}$$

   in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ an für $k \in \mathbb{Z}$. Klassifizieren Sie die Singularitäten und berechnen Sie die Residuen von f_k im Nullpunkt in Abhängigkeit von k.

   b) Begründen Sie, dass das Bild $f_k(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ in $\mathbb{C}$ dicht liegt.

6. Berechnen Sie mittels Residuensatz das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$